Claude LENORMAND

NOTE SUR LA SUITE DU DRAGON (1)

Il est possible d'obtenir tout élément de la "suite du dragon" à partir de l'écriture de son rang en base 2.

1°/ Etant donné deux suites d'éléments

$X = (x_1, x_2, \ldots)$ et $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$

et φ le morphisme inversible de X^* sur $\bar{X}^*$ tel que $\varphi x = \bar{x}$ pour tout $x \in X$, on construit la suite $S = (s_0, s_1, \ldots)$ dont les éléments sont les suites finies d'éléments de $X \cup \bar{X}$ ainsi définies :

$s_0 = e$ (suite vide)

$s_{i+1} = s_i \, x_i \, \varphi \tilde{s}_i$

où $\sim$ note le passage à la suite-miroir.

La "suite du dragon", que nous noterons d, est l'unique suite telle que chaque suite finie s_i en soit facteur gauche (le cas envisagé dans (1) s'obtient par substitution de 1 à tout x_i, et de 0 à tout $\bar{x}_i$).

2°/ Etant donné deux suites

$U = (u_1, u_2, \ldots)$ et $V = (v_1, v_2, \ldots)$

notons $U * V$ la suite composée $W = (w_1, w_2, \ldots)$ telle que $w_{2i} = v_i$ et $w_{2i-1} = u_i$ pour tout entier $i > 0$ (produit non associatif).

Par abus de notation, notons encore A la suite constante dont tous les termes sont a ; on a alors

$d = (x_1 * \bar{x}_1) * \left[(x_2 * \bar{x}_2) * \left[(x_3 * \bar{x}_3) * \ldots\ldots \right] \right]$

et le kième élément de cette suite peut être calculé directement : soit n le plus grand entier tel que 2^{n-1} divise k (notons q le quotient), l'élément cherché est alors
- x_n si q-1 est pair
- $\bar{x}_n$ sinon.

et se déduit donc aisément de l'écriture de l'entier k en base 2 : lors de l'addition de 1 à k-1, il suffit de considérer le premier caractère demeurant invariant.

---

(1) Voir l'exposé de PALMIER et GREUSSAY dans ARTINFO-MUSINFO n° 12 .

REMARQUE :

La suite finie s_i considérée plus haut est l'indication de la succession des mouvements des pièces dans le problème connu sous le nom de "tour de Hanoï" lorsque l'on dispose de i "disques".

****
*****
***
*